NOTA	

DATOS PERSONALES. USAR LÁPIZ PASTA y LETRA MAYÚSCULA:

Apellido paterno:	Apellido materno:	Nombre:
Número de RUT:	Número de MATRICULA:	SECCIÓN:

Instrucciones:
- **NO HAY CONSULTAS**.
- Las respuestas sin desarrollo o sin justificación, no dan puntaje.
- Las respuestas desordenadas, no serán corregidas.
- Queda totalmente prohibido el uso de calculadoras programables.
- Apagar y guardar sus **celulares**.

Nota$=1+\dfrac{Puntos}{10}$.

Duración= 60 minutos

CORRECCIÓN

Pregunta 1	
Pregunta 2	
Pregunta 3	
TOTAL PUNTOS	

UTALCA

IMAFI

1) **[20 pts.]** Determine la recta tangente a la ecuación $\arctan(x+y) = y^2+x^2$ en el punto $P = (0,0)$.

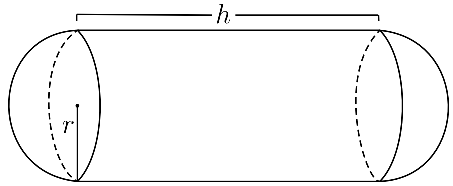
DESARROLLO

Derivando tenemos:

$$\frac{1}{1+(x+y)^2} \cdot (1+y') = 2yy' + 2x$$

(10 pts.)
Si evaluamos en $x = 0, y = 0$ tenemos que $y' = -1$.
(5 pts.)
Luego la recta es $y = -x$.
(5 pts.)

2) **[20 pts.]**Se desea construir un estanque de forma cilíndrica con tapas semi-esféricas como se muestra en la figura. El estanque debe tener una capacidad de π metros cúbicos. Encontrar el radio del estanque que minimicen el gasto de material utilizado.



Ayuda: Volumen esfera : $\frac{4}{3}\pi r^3$. Área esfera : $4\pi r^2$. Volumen cilindro: $\pi r^2 h$. Área cilindro $2\pi rh$.

DESARROLLO

El volumen total viene dado por

$$V = \pi r^2 h + \frac{4}{3}\pi r^3$$

(2 pts.)

Como el volumen debe valer π, podemos despejar h y obtenemos que $h = \frac{1}{r^2} - \frac{4}{3}r$.
Ahora bien la fórmula del área nos queda:

$$A = 2\pi rh + 4\pi r^2$$

(2 pts.)

Y si reemplazamos nuestro valor de h nos queda:

$$A(r) = 2\pi r\left(\frac{1}{r^2} - \frac{4}{3}r\right) + 4\pi r^2 = \frac{2\pi}{r} - \frac{8\pi}{3}r^2 + 4\pi r^2$$

(2 pts.)

Luego necesitamos calcular la derivada de la función A.

$$A'(r) = -\frac{2\pi}{r^2} - \frac{16\pi}{3}r + 8\pi r$$

(6 pts.)

Ahora buscamos los puntos críticos y nos da que $r^3 = \frac{3}{4}$, por lo que $r = \sqrt[3]{\frac{3}{4}}$. (4 pts.)
Ahora bien en ese valor tiene que haber un mínimo por la naturaleza del problema (también se puede hacer el test de la segunda derivada).(2 pts.)

Luego para que tenga un área mínima del radio debe ser de $r = \sqrt[3]{\frac{3}{4}}$ metros. (2 pts.)

3) Considere la función $f(x) = 2 + \dfrac{x-2}{(x-1)^3}$. Determine:

   a) **[5 pts.]** Máximos y mínimos locales (si es que existen).
   b) **[5 pts.]** Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
   c) **[5 pts.]** Intervalos de concavidad. Puntos de inflexión.
   d) **[5 pts.]** Gráfica de la función.

Ayuda: $f'(x) = -\frac{2x-5}{(x-1)^4}$ y $f''(x) = \frac{6(x-3)}{(x-1)^5}$.

DESARROLLO

Los puntos a analizar son $x = 1$, $x = \frac{5}{2}$ y $x = 3$.

	$-\infty$		1		$\frac{5}{2}$		3		∞
$f'(x)$		$+$		$+$		$-$		$-$	
$f''(x)$		$+$		$-$		$-$		$+$	

a) Sólo tiene un máximo que vale $\dfrac{58}{27}$ en $x = \dfrac{5}{2}$. (5 pts.)

b) Intervalos de crecimiento: $]-\infty, 1[$ y $\left]1, \dfrac{5}{2}\right]$.(3 pts.)

   Intervalos de decrecimiento: $\left[\dfrac{5}{2}, \infty\right[$.(2 pts.)

c) Cóncava hacia arriba $]-\infty, 1[$ y $[3, \infty[$.(2 pts.)
   Cóncava hacia abajo $]1, 3]$.(2 pts.)
   Tiene un punto de inflexión en $\left(3, \frac{17}{8}\right)$.(1 pts.)

d) La gráfica nos queda (5 pts.)